(38) Bestimmen Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ der Ungleichung

$$\frac{3}{|x-2|} < 2 + 3x.$$

Lösung: Hier kommt ein Betrag vor, also müssen wir eine Fallunterscheidung machen. Wenn $x > 2$ ist, dann gilt $|x-2| = x-2$ und wenn $x < 2$ ist, dann gilt $|x-2| = -(x-2)$. Für jeden dieser Fälle lösen wir dann einfach die Ungleichung.

Fall $x > 2$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} &< 2 + 3x \qquad \big| \cdot (x-2) > 0^1 \\ 3 &< 3x^2 - 4x - 4 \qquad \big| -3 \\ 0 &< 3x^2 - 4x - 7 \end{aligned}$$

Diese quadratische Ungleichung lösen wir indem wir die Nullstellen (also die Gleichheitsfälle) berechnen

$$\begin{aligned} & 0 = 3x^2 - 4x - 7 \\ \Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{6} \\ \Rightarrow \quad & x_1 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Damit ist die Menge aller x, die die Gleichung $0 < 3x^2 - 4x - 7$ erfüllen $(-\infty, -1) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$. Allerdings hatten wir die Annahme $x > 2$, also dürfen wir jetzt nur den Teil der Lösungsmenge nehmen, der auch $x > 2$ erfüllt. Also haben wir

$$L_1 = \left(\frac{7}{3}, \infty\right).$$

Fall $x < 2$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{-(x-2)} &< 2 + 3x \qquad \big| \cdot -(x-2) > 0 \\ 3 &< -3x^2 + 4x + 4 \qquad \big| -3 \\ 0 &< -3x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt wieder die Nullstellen.

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 4x + 1 \\ \Rightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16+12}}{-6} \\ \Rightarrow \quad x_1 &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{28}}{6} \quad x_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6} \end{aligned}$$

Da wir hier ein Minus vor dem x^2 haben, ist der Bereich wo $-3x^2 + 4x + 1$ größer als Null ist, der zwischen den Nullstellen. Also $\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{28}}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6}\right)$. Hier Dürfen wir jetzt aber nur den Teil der Lösungsmenge verwenden, für den $x < 2$ gilt. Da aber eh alle Zahlen in der Lösungsmenge $x < 2$ erfüllen, ist die ganze Menge eine zulässige Lösung, also

$$L_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{28}}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6}\right)$$

und somit ist insgesamt die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{28}}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, \infty\right).$$

[1] Immer wenn wir bei einer Ungleichung mit einer Variable multiplizieren, müssen wir uns überlegen, ob der Ausdruck positiv oder negativ ist. Wäre der Ausdruck negativ, dann müssen wir das Vorzeichen der Ungleichung umdrehen. Kann der Ausdruck positiv und negativ sein, müssen wir eine weitere Fallunterscheidung machen.
In unserem Fall ist der Ausdruck aber sicher positiv aufgrund der vorher getroffenen Fallunterscheidung.