(42) (a) Beweisen Sie, indem Sie beide Seiten mit $(1-q)$ multiplizieren, die Identität

$$\sum_{m=0}^{r-1} q^m = \frac{1-q^r}{1-q}.$$

Für welche $q \in \mathbb{R}$ gilt diese Formel nicht?

(b) Folgern Sie daraus den Wert der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} q^m$.

(c) Überprüfen Sie welche der folgenden Reihen konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot(-1)^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{-n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot(-1)^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{-n}.$$

Lösung:

(a) Wir berechnen zuerst den Wert des Produkts $(1-q)\cdot\sum_{m=0}^{r-1} q^m$:

$$(1-q)\cdot\sum_{m=0}^{r-1} q^m = \sum_{m=0}^{r-1}(1-q)q^m = \sum_{m=0}^{r-1} q^m - q^{m+1} =$$

$$=(1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+\cdots+(q^{r-2}-q^{r-1})+(q^{r-1}-q^r) = 1-q^r$$

Wenn wir jetzt wieder durch $(1-q)$ durch dividieren, erhalten wir

$$\sum_{m=0}^{r-1} q^m = \frac{1-q^r}{1-q}.$$

Das ganze können wir natürlich nur machen, wenn $q \neq 1$ gilt.

(b) Mit dieser Formel können wir auch den Grenzwert der Reihe berechnen:

$$\sum_{m=0}^{\infty} = \lim_{r\to\infty} \frac{1-q^r}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \text{divergent} & q \leq -1 \end{cases}$$

(*Die Fallunterscheidung in* $q \geq 1$ *und* $q \leq -1$ *kann man sich auch sparen. Das ist ein bisschen streberhaft...*)

(c) Jetzt berechnen wir die einzelnen Reihen, indem wir sie auf die Form $\sum_{m=0}^{\infty} q^m$ bringen.

$$\sum_{n=3}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+3} = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{1}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot(-1)^n} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \Rightarrow \nexists$$ [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n = \infty$$ [2]

[1] Das Symbol $\nexists$ bedeutet der Wert der Reihe existiert nicht. Wir wissen, dass der Grenzwert nicht existiert, da ja $q \leq -1$ ist.

[2] Da ja $q \geq 1$ gilt.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{20}{9}\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot(-1)^n} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \Rightarrow \nexists$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{8}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\pi}{8}} = \frac{8}{8-\pi}$$