(42) Bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstieges der Funktion $z(x, y) = 3x + 2y$ im Punkt $P = (2, 5)$. Geben Sie dann die Gleichung der Falllinie durch den Punkt P an. Machen Sie dasselbe für die Tangentialebene der Funktion $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$.

Lösung:

(a) Die Richtung des stärksten Anstieges ist immer der Gradient und den berechnen wir so

$$\nabla z(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit kennen wir die Falllinie in der $xy-$Ebene.

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnen wir noch die $z-$Koordinaten. Dazu setzen wir einfach den Weg in x und y Koordinate in die Funktion ein, wir bekommen also

$$z(2 - 3t, 5 - 2t) = 3(2 - 3t) + 2(5 - 2t) = 16 - 13t.$$

Damit haben wir die Falllinie.

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

(b) Für die zweite Funktion machen wir jetzt genau dasselbe. Zunächst berechnen wir den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\nabla f(2, 5) = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Wie erhalten also den Weg in der xy-Ebene

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Um die z-Koordinate zu berechnen, setzen wir jetzt aber nicht in die Funktion selbst ein, sondern in die Funktion ihrer Tangentialebene. (Weil die Kugel eben entlang ihrer Tangentialebene rollen soll.)
Die Tangentialebene bekommen wir als Taylorpolynom erster Ordnung, also

$$z(x, y) = f(2, 5) + \nabla f(2, 5) \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 5 \end{pmatrix} = 62 + 12(x - 2) + 20(y - 5)$$

Einsetzen liefert

$$z(2 - 12t, 5 - 20t) = 62 - 12 \cdot 12t - 20 \cdot 20t = 62 - 544t.$$

Insgesamt ergibt sich also die Falllinie

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 62 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ -544 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

(43) Was ist ein lokales Extremum? Bestimmen Sie die lokalen Extrema folgender Funktionen:
(a) $f(x,y) = y^2 - y^2x^2 + x - 2y^2x$
(b) $g(x,y) = \cos y \sin x$
(c) $h(x,y) = \mathrm{e}^{-y^2} \sin x$

Lösung:
Um Kandidaten für lokale Extrema zu finden, müssen wir den Gradienten Null setzen.
(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy^2 + 1 - 2y^2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2yx^2 - 4xy = 0$$

Aus der ersten Gleichung lässt sich y^2 heraus heben und aus der zweiten y.

$$1 = 2y^2(1+x)$$
$$0 = 2y(1-2x-x^2)$$

Für die zweite Gleichung gibt es also die Lösungen $y = 0$, oder $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Für $y = 0$ lässt sich die erste Gleichung nicht lösen. Für $x = -1 + \sqrt{2}$ ergibt sich aus der ersten Gleichung $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$. Für $x = -1 - \sqrt{2}$ hat die erste Gleichung keine Lösung. Damit beleiben die zwei Extremstellen $E_1 = (-1+\sqrt{2}, \sqrt[4]{8})$ und $E_2 = (-1+\sqrt{2}, -\sqrt[4]{8})$.
(b)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos y \cos x = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\sin x \sin y = 0$$

Damit erhalten wir die Lösungen $(\frac{\pi}{2} + z\pi, z\pi)$ und $(z\pi, \frac{\pi}{2} + z\pi)$ für $z \in \mathbb{Z}$.
(c)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \mathrm{e}^{-y^2} \cos x = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2y\,\mathrm{e}^{-y^2} \sin x = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass x eine Nullstelle des cos ist. Damit folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$. Also $E = (\frac{\pi}{2} + z\pi, 0)$ für $z \in \mathbb{Z}$.