(33) Verweenden Sie die Definition des Grenzwert von Folgen und eine direkte Abschätzung um zu zeigen, dass die Folge

$$a_n = \frac{2n^3 - 1}{2n^3 + n + 3}$$

gegen 1 konvergiert.

Lösung:
Wir müssen ein N bestimmen, sodass

$$\left| \frac{2n^3 - 1}{2n^3 + n + 3} - 1 \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Dazu formen wir die Ungleichung einfach um:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2n^3 - 1}{2n^3 + n + 3} - 1 \right| &< \epsilon \\
\left| \frac{2n^3 - 1 - (2n^3 + n + 3)}{2n^3 + n + 3} \right| &< \epsilon \\
\left| \frac{-n - 4}{2n^3 + n + 3} \right| &< \epsilon \\
\frac{n + 4}{2n^3 + n + 3} &< \epsilon \qquad \Big| \cdot (2n^3 + n + 3) \\
n + 4 &< 2n^3\epsilon + n\epsilon + 3\epsilon \qquad \Big| - n - 4 \\
0 &< 2n^3\epsilon + n(\epsilon - 1) + 3\epsilon - 4
\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung sehr schwierig nach n aufzulösen ist, versuchen wir die rechte Seite mit einem einfacheren Term nach unten abzuschätzen

$$\begin{aligned}
0 &< 2n^3\epsilon + n(\epsilon - 1) + n\underbrace{(3\epsilon - 4)}_{<0} < 2n^3\epsilon + n(\epsilon - 1) + 3\epsilon - 4 \\
0 &< 2n^3\epsilon + n(4\epsilon - 5) < 2n^3\epsilon + n(\epsilon - 1) + 3\epsilon - 4
\end{aligned}$$

Wir haben hier einen negativen Term mit n multipliziert, also ist die linke Seite sicher kleiner als die rechte Seite. Es reicht also ein n zu finden, sodass

$$0 < 2n^3\epsilon + n(4\epsilon - 5)$$

gilt. Dann muss auch automatisch schon

$$0 < 2n^3\epsilon + n(\epsilon - 1) + 3\epsilon - 4$$

gelten. Wir lösen also die Ungleichung auf

$$0 < 2n^3\epsilon + n(4\epsilon - 5) \qquad \Big| : n$$

$$0 < 2n^2\epsilon + 4\epsilon - 5 \qquad \Big| + 5 - 4\epsilon \quad \Big| : 2\epsilon$$

$$\frac{5 - 4\epsilon}{2\epsilon} < n^2 \qquad \Big| \sqrt{\cdot}$$

$$\sqrt{\frac{5 - 4\epsilon}{2\epsilon}} < n$$