(32) Gegeben ist das Tetraeder mit den Eckpunkten $A = (3, 1, -1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (-5, 3, 1)$ und $D = (-4, 1, 2)$. Berechne jeweils den Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

Lösung:
Um dieses Beispiel zu lösen, muss man Folgendes wissen:

- Der Winkel zwischen zwei Ebenen als der Winkel der zugehörigen Normalvektoren definiert ist.
- Den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet man mit der Formel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right).$$

- Den Normalvektor auf eine Ebene, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 enthält, bekommt man über das Kreuzprodukt

$$\boldsymbol{n} = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1).$$

Zunächst müssen wir also die Normalvektoren der vier Ebenen des Tetraeders berechnen. Da wir nur an der Richtung des Normalvektors interessiert sind, können wir die Vektoren, wenn möglich kürzen.

- Ebene $[ABC]$:

$$n_{ABC} = (B - A) \times (C - A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Ebene ABD:

$$n_{ABD} = (B - A) \times (D - A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- Ebene ACD:

$$n_{ACD} = (C - A) \times (D - A) = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Ebene BCD:

$$n_{BCD} = (C - B) \times (D - B) = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt bleibt nur die sechs Winkel entlang der sechs Kanten zu berechnen.

$$\angle_{AB} = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{n}_{ABC} \cdot \boldsymbol{n}_{ABD}}{\|\boldsymbol{n}_{ABC}\|\|\boldsymbol{n}_{ABD}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-8\\-7\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}-3\\-8\\-7\end{pmatrix}\right\|}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{5}{7\sqrt{122}}\right) \approx 0,091$$

$$\angle_{AC} = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{n}_{ABC} \cdot \boldsymbol{n}_{ACD}}{\|\boldsymbol{n}_{ABC}\|\|\boldsymbol{n}_{ACD}\|}\right) = \cdots \approx 0.156$$

$$\angle_{AD} = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{n}_{ABD} \cdot \boldsymbol{n}_{ACD}}{\|\boldsymbol{n}_{ABD}\|\|\boldsymbol{n}_{ACD}\|}\right) = \cdots \approx 0.229$$

$$\angle_{BD} = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{n}_{ABD} \cdot \boldsymbol{n}_{BCD}}{\|\boldsymbol{n}_{ABD}\|\|\boldsymbol{n}_{BCD}\|}\right) = \cdots \approx 0.254$$

Alle Winkel sind hier in Radianten angegeben. Zu jedem Winkel α wäre der Wert $\pi - \alpha$ auch eine zulässige Lösung gewesen. Konventionsgemäß nimmt man aber immer jenen Winkel, der kleiner als $\pi/2$ ist.