(39) (a) Bringen Sie die Kegelschnittlinie $x^2+xy+y^2=1$ durch eine Drehung S (also eine orthogonale Abbildung mit $\det S = 1$) des Koordinatensystems auf Hauptachsenform. Um welche Art von Kegelschnitt handelt es sich?

(b) Bringen Sie die Fläche $x^2+2xz+y^2-2yz=-1$ auf Hauptachsenform. Um welche Art von Fläche handelt es sich?

Lösung:

(a) Bei diesem Beispiel müssen wir zunächst die Gleichung des Kegelschnitts mit einer Matrix anschreiben.

$$x^2+xy+y^2 = (x,\ y)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 1$$

Die Idee ist jetzt Folgende: Wir können einen Basiswechsel machen, sodass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

auf Diagonalgestalt bringen. Dazu brauchen wir die Basis aus Eigenvektoren. Da die Matrix A symmetrisch ist, stehen ihre Eigenvektoren normal aufeinander. Zum Berechnen der Eigenvektoren brauchen wir erstmal die Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{3}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Jetzt können wir die zugehörigen Eigenvektoren berechnen:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}:$$
$$\left.\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}:$$
$$\left.\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

Wir haben also eine Basis aus Eigenvektoren ermittelt $B = \{v_1, v_2\}$. Allerdings brauchen wir noch ein bisschen mehr. Da der Basiswechsel eine Drehung sein soll, muss die Basis B eine Orthogonalmatrix[1] mit $\det(B) = +1$ sein. Da die Spalten schon normal aufeinander stehen, müssen wir sie nur noch normieren:

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

[1] Das heißt, dass die Spalten normal aufeinander stehen und normiert sind.

Jetzt müssen wir $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ noch in der richtigen Reihenfolge anordnen. (Es gibt immer eine Reihenfolge, sodass die Determinante $+1$ ist und eine, sodass die Determinante -1 ist.) In unserem Fall ist die richtige Wahl für die Basis also

$$O = \{\tilde{v}_2, \tilde{v}_1\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Da O eine Orthogonalmatrix ist, gilt $O^{-1} = O^T$. Wenn jetzt $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ die Koordinaten in der neuen Basis O sind, dann berechnen sich die Koordinaten in der alten Basis durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Wenn wir in der Gleichung des Kegelschnitts jetzt $O \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& (x,\ y) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(O \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} O \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (\tilde{x},\ \tilde{y}) O^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 1 \\
\Leftrightarrow^{2} \quad & (\tilde{x},\ \tilde{y}) O^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 1 \\
\Leftrightarrow^{3} \quad & (\tilde{x},\ \tilde{y}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{9\tilde{y}^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist also der Kegelschnitt in der gedrehten Basis. Da beide Eigenwerte der Matrix positiv sind, handelt es sich um eine Ellipse.

(b) Für Punkt (b) machen wir das Gleiche, aber nur reduziert auf das, was man auch beim Test hinschreiben muss. Wir müssen also:

(i) die Gleichung mit einer Matrix anschreiben,
(ii) die Eigenwerte der Matrix berechnen,
(iii) die Eigenvektoren der Matrix berechnen,
(iv) die Eigenvektoren normieren und so anordnen, dass der Basiswechsel eine Drehung beschreibt,
(v) die Gleichung in den neuen Variablen anschreiben.

(i) Matrix:

$$x^2 + 2xz + y^2 - 2yz = -1 \quad \Rightarrow \quad (x,\ y,\ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1$$

[2] Hier haben wir verwendet, dass $O^T = O^{-1}$, da O eine Orthogonalmatrix ist.
[3] Hier haben wir verwendet, dass $O^{-1}AO$ den Basiswechsel in die Basis der Eigenvektoren beschreibt.

(ii) Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)[\lambda^2 - \lambda - 2] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -1$$

(iii) Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 1:$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2:$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -1:$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Normieren und „sortieren“:

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnen wir die Determinante:

$$\det(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = \det\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -1$$

Die Determinant ist -1, also entspricht der Wechsel in die aktuelle Basis nicht einer Drehung, sondern einer Drehspiegelung. Wir vertauschen also einfach zwei Basisvektoren, damit sich das Vorzeichen der Determinant umdreht. (Z.B. $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$) Wir haben also die neue Basis:

$$O = (\tilde{v}_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(v) Gleichung in den neuen Koordinaten:
In den Koordinaten zur neuen Basis hat die Kegelschnittgleichung die Form

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = -1$$

Das entspricht einem zweischaligen Roatationshyperboloid.