(97) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren für folgende lineare Abbildungen
(a) Spiegelung am Ursprung
(b) Spiegelung an der Geraden $ax + by = 0$
(c) Orthogonale Projektion auf die Gerade $ax + by = 0$
(d) Streckung um den Faktor λ.
(e) Roataion um den Winkel ϕ.

Lösung: Um dieses Beispiel zu lösen, müssen wir keine Rechnungen durchführen sondern einfach nur geometrisch überlegen, was die einzelnen linearen Abbildungen bedeuten.

Zur Erinnerung: Eigenvektoren sind genau jene Vektoren, die durch die lineare Abbildung auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet werden. („Die Vektoren, die nicht gedreht werden.“)

(a) Spiegelung am Ursprung:

Die Spiegelung am Ursprung dreht jeden Vektor genau um, also multipliziert

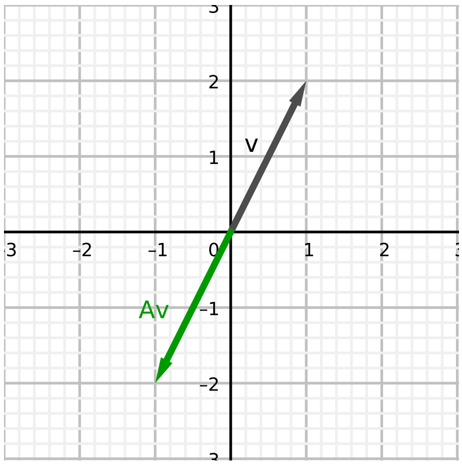

ABBILDUNG 1. Der Vektor v und sein Bild unter der Spieglung Av.

ihn mit -1. Das heißt, dass jeder Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist.
Mit anderen Worten: Der Eigenwert -1 hat einen zweidimensionalen Eigenraum

$$U = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

(b) Spiegelung an der Geraden $ax + by = 0$:

Bei der Spiegelung an einer Geraden wird der Normalvektor genau umge-

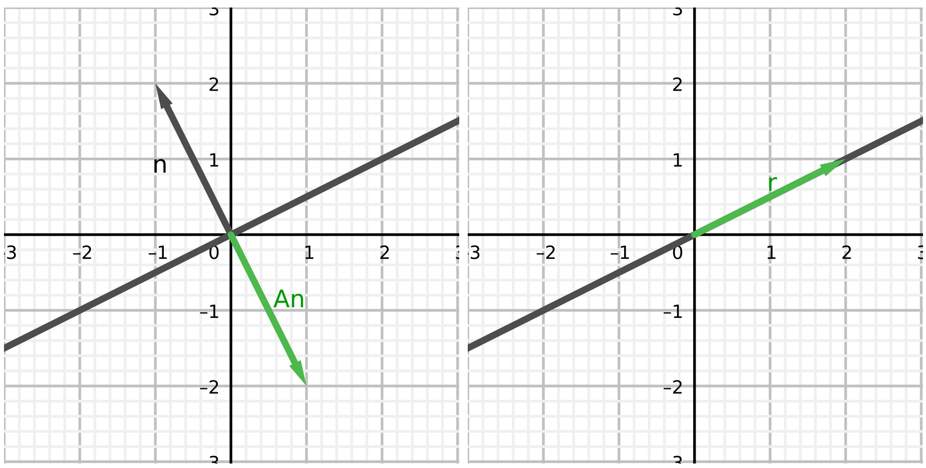

Abbildung 2. Bild von Normalvektor und Richtungsvektor unter der Spiegelung

dreht. Er ist also ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Der Richtungsvektor der Geraden verändert sich nicht bei der Spiegelung, das heißt er wird quasi „mit 1 multipliziert“. Folglich ist er ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Die Gerade $ax+by = 0$ hat den Normalvektor $(a, b)^T$ und den Richtungsvektor $(b, -a)$, also haben wir

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_2 = -1.$$

(c) Orthogonale Projektion auf die Gerade $ax + by = 0$:

Bei der orthogonalen Projektion gilt fast dasselbe wie bei der Spiegelung. Der Richtungsvektor bleibt bei der Projektion erhalten, aber der Normalvektor wird auf den Nullpunkt projiziert. Folglich ist der Normalvektor der Geraden jetzt ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Wir haben also

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_2 = 0.$$

(d) Streckung um den Faktor λ:

Diese Abbildung streckt jeden Vektor um den Faktor λ, also ist auch jeder Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Wir können also wieder sagen, dass der Eigenraum zum Eigenwert λ der Raum

$$U = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

(e) Rotation um den Winkel ϕ:

Die Rotation hat im Allgemeinen keine Eigenvektoren, weil sich im Allgemeinen die Richtung des Vektors immer ändern wird. Die einzigen Ausnahmen sind die Rotation um 180° und die Rotation um 360°.
Die Rotation um 180° entspricht der Spiegelung am Ursprung, da sie jeden Vektor genau umdreht. Folglich ist für die Rotation jeder Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert -1.

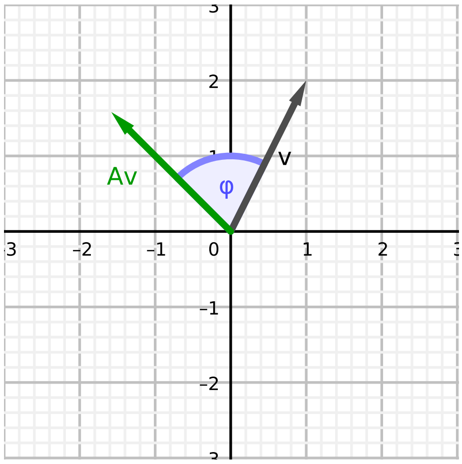

Abbildung 3. Der Vektor v und sein Bild unter der Rotation.

Die Rotation um 360° ist einfach die Identität, also jene Abbildung, die jeden Vektor auf sich selbst abbildet. Für diese Abbildung ist jeder Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.