Aufgabe 36:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des (ebenen) Vierecks mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, indem Sie die Skalarprodukte geeigneter Vektoren ausrechnen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ Vektorräume sind und bestimmen Sie jeweils eine Basis.
(b) Weisen Sie nach, dass man jede reelle $2x2$-Matrix M eindeutig als Summe $M = S + A$ schreiben kann, wobei S aus dem Unterraum $\mathcal{S}$ und A aus dem Unterraum $\mathcal{A}$ ist.
(c) Bestimmen Sie speziell diese Zerlegung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei a, b, c, d die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer sind.

Lösung:

(a) Wir wissen bereits, dass der Raum aller $2x2$-Matrizen ein Vektorraum ist und müssen somit nur die Unterraumkriterien nachrechnen, also dass sowohl Addition als auch skalare Multiplikation wieder ein Element aus dem jeweiligen Raum liefern.

Wir beginen mit $\mathcal{S}$. Es gilt für $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$:

$$S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

und für $S \in \mathbb{S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha S = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}.$$

Dasselbe können wir jetzt für $\mathcal{A}$ machen. Für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ -d_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ -d_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 + d_2 \\ -(d_1 + d_2) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

und für $A \in \mathbb{S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha d \\ -\alpha d & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ Vektorräume sind und müssen nur noch jeweils eine Basis finden.

Für $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ gilt:

$$S = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Menge

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathcal{S}$. Um zu zeigen, dass die Menge auch eine Basis ist, müssen wir also nur noch zeigen, dass die drei Matrizen linear unabhängig sind. Dafür betrachten wir die Gleichung:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht leicht, dass diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn $a = b = c = 0$. Somit sind die drei Matrizen auch linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathcal{S}$. Der Vektorraum $\mathcal{S}$ ist also dreidimensional.

FÜr $\mathcal{A}$ ist das finden einer Basis etwas einfacher. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dehalb ist $\mathcal{A}$ eindimensional und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bildet eine Basis.

(b) Wir betrachten eine allgemeine 2x2-Matrix $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ und sollen die in einen Teil $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ und einen Teil $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ zerlegen, sodass $M = S + A$. Dafür müssen folgende vier Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= b + d \\ x_3 &= b - d \\ x_4 &= c \end{aligned}$$

Es ist klar, dass wir $a = x_1$ und $c = x_4$ wählen müssen. Für b und d ergibt sich $b = \frac{x_2+x_3}{2}$ und $d = \frac{x_2-x_3}{2}$. Man kann sich das so vorstellen, dass wir für b genau den Mittelwert zwischen x_2 und x_3 wählen und d dann der Abstand dieses Mittelpunktes zu den zwei Werten ist. Damit haben wir also:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & \frac{x_2+x_3}{2} \\ \frac{x_2+x_3}{2} & x_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_2-x_3}{2} \\ -\frac{x_2-x_3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M = S + A.$$

Damit haben wir gezeigt, dass sich jede Matrix in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen können.

(c) Als kleine Zusatzaufgabe bestimmen wir die Zerlegung für die Matrix mit den vier letzten Ziffern meiner Matrikelnummer

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie in (b) gezeigt, ist die Zerlegung dieser Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 3,5 \\ 3,5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3,5 \\ -3,5 & 0 \end{pmatrix}.$$