Aufgabe Z3:

Gegeben seien die vier Polynome:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - x^2 \\ p_2(x) &= 1 + x + 2x^2 - 2x^3 \\ p_3(x) &= -x - x^3 \\ p_4(x) &= 2x + 3x^2 - x^3 \end{aligned}$$

und $\mathbb{P}_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, der Raum der reellen Polynome von Grad ≤ 3.

(a) Zeigen Sie, dass die obigen Polynome linear abhängig sind. Sie können die Aufgabe lösen, indem Sie zeigen, dass sich p_4 als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 darstellen lässt.
(b) Finden Sie eine Basis für den Unterraum $U = \{ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) + dp_4(x) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}_3$.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass die vier Polynome linear abhängig sind, indem wir zeigen, dass es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) &= p_4(x) \\ \lambda_1(1 - x^2) + \lambda_2(1 + x + 2x^2 - 2x^3) + \lambda_3(-x - x^3) &= 2x + 3x^2 - x^3 \\ 1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + x \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) + x^2 \cdot (-\lambda_1 + 2\lambda_2) + x^3 \cdot (-2\lambda_2 - \lambda_3) &= 1 \cdot 0 + x \cdot 2 + x^2 \cdot 3 + x^3 \cdot (-1) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, dass folgende Gleichungen erfüllt sein müssen, damit so ein Vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ existiert:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 3 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir jetzt wie gewohnt in ein Gleichungssystem schreiben und lösen. Beachtet hierbei, dass wir vier Gleichungen, jedoch nur drei Unbekannte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ haben. Das bedeutet, dass unser Gleichungssystem keine Lösung haben *muss*. Hat das Gleichungssystem keine Lösung, bedeutet das, dass $p_4(x)$ nicht aus $p_1(x) - p_3(x)$

linearkombiniert werden kann, die Polynome wären also linear unabhängig. Hat das Gleichungssystem eine Lösung, sind die Polynome linear abhängig. Wir lösen das Gleichungssystem wie folgt:

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \\ -1 & 2 & 0 & 3 & +\mathrm{I} \\ 0 & -2 & -1 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \leftrightarrow \mathrm{III} \\ 0 & 3 & 0 & 3 & :3, \leftrightarrow \mathrm{II} \\ 0 & -2 & -1 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 1 & 0 & 0 & -\mathrm{II} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \cdot(-1), +\mathrm{II} \\ 0 & -2 & -1 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & -2 & -1 & -1 & +2\cdot\mathrm{II}, +\mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Da die letzte Zeile wegfällt, ist das Gleichungssystem lösbar und unsere Polynome somit linear abhängig. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) &= p_4(x) \\ (-1)\cdot p_1(x) + 1\cdot p_2(x) + (-1)\cdot p_3(x) &= p_4(x) \end{aligned}$$

(b) Der Unterraum U besteht aus allen Linearkombinationen, die sich aus $p_1(x) - p_4(x)$ ergeben. Wir wissen bereits, dass die Polynome $p_1(x) - p_3(x)$ linear unabhängig sind (da uns nur eine Zeile weggefallen ist), $p_4(x)$ aber aus den anderen Polynomen linearkombiniert werden kann. Somit hat U Dimension 3, wir brauchen also drei Basispolynome. Praktischerweise ist diese bereits durch $p_1(x) - p_3(x)$ gegeben, denn aus diesen kann man sowohl jede Kombination aus $p_1(x) - p_3(x)$, als auch $p_4(x)$ linearkombinieren.