(8) Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wie viele Abbildungen $f : A \to A$ gibt es? Welche davon sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} aller bijektiven $f : A \to A$ an.

Lösung: Eine Abbildung von A nach A muss jedem Element aus A genau ein Element aus A zuordnen. Wir haben also drei Elemente, denen wir wiederum jeweils drei Elemente zuordnen können, was zu $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ verschiedenen Möglichkeiten führt. Wer richtig motiviert ist, kann alle diese aufschreiben. Ich würde davon aber eher abraten

$$\begin{aligned}
f_1 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 1\\
f_2 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2\\
f_3 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3\\
f_4 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 1\\
f_5 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 2\\
f_6 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3\\
f_7 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1\\
&\vdots\\
f_{27} :& 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 3.
\end{aligned}$$

Jetzt ist noch die Frage offen, welche dieser Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Damit eine Funktion injektiv ist, darf jedes Element auf der rechten Seite maximal einmal vorkommen. Von den ersten 7 Funktionen ist also nur f_6 injektiv.
Damit eine Funktion surjektiv ist, muss mindestens einmal auf jedes Element abgebildet werden. Bei den ersten 7 Funktionen erfüllt das auch nur die Funktion f_6. Diese Funktion ist also injektiv und surjektiv, also auch bijektiv.
(Wenn eine Funktion zwei Mengen mit gleich vielen Elementen aufeinander abbildet, dann sind injektiv, surjektiv und bijektiv gleichbedeutend.)
Die bijektiven Funktionen sind also genau die Funktionen, wo einmal auf 1, einmal auf 2 und einmal auf 3 abgebildet wird. Konkret sind das die Funktionen

$$\begin{aligned}
b_1 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3\\
b_2 :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 2\\
b_3 :& 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3\\
b_4 :& 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1\\
b_5 :& 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 1\\
b_6 :& 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2.
\end{aligned}$$

Die Umkehrabbildungen dazu sind

$$\begin{aligned}
b_1^{-1} :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3\\
b_2^{-1} :& 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 2\\
b_3^{-1} :& 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3\\
b_4^{-1} :& 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2\\
b_5^{-1} :& 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 1\\
b_6^{-1} :& 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1.
\end{aligned}$$