(4) Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$y' = y/x + x$$
$$y' = y/x + x\sin(x)$$
$$y' = y/x + x\sin(x) + x.$$

Lösung: Wir haben es hier mit inhomogenen Differentialgleichungen zu tun. Um diese zu lösen, lösen wir zuerst die homogenen Differentialgleichungen und machen dann die Variation der Konstanten um die Partikulärlösung zu finden. Die homogene Differentialgleichung bekommen wir, indem wir einfach den additiven Term weglassen.

(a) Zuerst lösen wir die Gleichung $y' = y/x + x$. Die homogene Differentialgleichung ist

$$y' = y/x$$

Jetzt müssen wir eine separation der Variablen machen, also alle y auf die linke Seite bringen und alle x auf die rechte Seite. Dazu dividieren wir einfach durch y und erhalten

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x}$$

Jetzt integrieren wir nach dx.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}y' \,\mathrm{dx} &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} \\
\int \frac{1}{y}\frac{\mathrm{dy}}{dx}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{dy} &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} \\
\ln(|y|) &= \ln(|x|) + c \qquad \Big|\exp() \\
|y| &= \mathrm{e}^c \cdot |x| \\
y &= Ax
\end{aligned}$$

Wir haben also die homogene Lösung $y = Ax$ gefunden. Jetzt wollen wir die ursprüngliche Differentialgleichung lösen, indem wir die Variation der Konstanten machen. Wir machen also den Ansatz[1] $y_p = A(x) \cdot x$ und setzen diese Funktion in die Differentialgleichung ein.

$$\begin{aligned}
(A(x)x)' &= \frac{A(x)x}{x} + x \\
A'(x)x + A(x) &= A(x) + x \qquad \Big| - A(x) \\
A'(x)x &= x \qquad \Big| \cdot \frac{1}{x} \\
A'(x) &= 1 \qquad \Big| \int \cdot \,\mathrm{dx} \\
A(x) &= x + c
\end{aligned}$$

[1] Das heißt, dass die Konstante jetzt auch eine Funktion ist.

Damit haben wir $A(x)$ berechnet. Wir sind nur an einer einzigen Lösung für $A(x)$ interessiert, also können wir die Konstante c vernachlässigen. Die Partikulärlösung ergibt sich jetzt indem wir für $A(x)$ einsetzen.

$$y_p(x) = x \cdot x = x^2.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist jetzt die homogene Lösung plus der Partikulärlösung, die wir gerade gefunden haben

$$y(x) = Ax + x^2.$$

(b) Für die Differentialgleichung $y' = y/x + x\sin(x)$ gehen wir genauso vor.

$$\begin{aligned}
\text{Homogen:} \quad y' &= y/x \\
\frac{1}{y}y' &= 1/x \qquad \Big| \int \cdot \mathrm{dx} \\
\ln(|y|) &= \ln(|x|) + c \\
|y| &= \mathrm{e}^c\,|x| \\
y &= Ax
\end{aligned}$$

Jetzt die Partikulärlösung berechnen mit dem Ansatz $y_p(x) = A(x)x$.

$$\begin{aligned}
(A(x)x)' &= \frac{A(x)x}{x} + x\sin(x) \\
A'(x)x + A(x) &= A(x) + x\sin(x) \qquad \Big| - A(x) \\
A'(x)x &= x\sin(x) \\
A'(x) &= \sin(x) \qquad \Big| \int \cdot \mathrm{dx} \\
A(x) &= -\cos(x)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Partikulärlösung

$$y_p(x) = -\cos(x)x$$

und die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ax - \cos(x)x.$$

(c) Bei der letzten Gleichung sind einfach die Inhomogenitäten der ersten beiden Gleichungen addiert und der homogene Teil ist derselbe. Deswegen muss die Lösung auch den gleichen homogenen Teil und die Summer der beiden Partikulärlösungen haben

$$y(x) = Ax + x^2 - \cos(x)x.$$