(5) *Lösung:*
Statt den gesamten Weg wie am Freitag über einen Parameter zu parametrisieren, kann es einfacher sein, die einzelnen Teilstücke jeweils separat zu parametrisieren (die zwei „geraden “Stücke über den Radius und den Kreisbodgen über den Winkel). Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(r) &= r\begin{pmatrix}\cos(-\pi+\frac{\mu}{2})\\ \sin(-\pi+\frac{\mu}{2}))\end{pmatrix}, && r\in[0,R)\\
\gamma_2(\phi) &= R\begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\end{pmatrix}, && \phi\in[-\pi+\frac{\mu}{2},\pi-\frac{\mu}{2})\\
\gamma_3(r) &= (R-r)\begin{pmatrix}\cos(\pi-\frac{\mu}{2})\\ \sin(\pi-\frac{\mu}{2}))\end{pmatrix}, && r\in[0,R)
\end{aligned}$$

Damit können wir uns jetzt die Länge der Kurve und den Flächeninhalt ausrechnen. Dafür verwenden wir die Formel

$$L=\int_a^b\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}dt$$

Es ergibt sich:

$$L(\gamma_1)=\int_0^R\sqrt{\cos(-\pi+\frac{\mu}{2})^2+\sin(-\pi+\frac{\mu}{2})^2}dr=\int_0^R 1dr=R$$

L(γ_3) kann analog berechnet werden.
Für γ_2 gilt

$$L(\gamma_2)=\int_{-\pi+\frac{\mu}{2}}^{\pi-\frac{\mu}{2}}\sqrt{R^2\cos(\phi)^2+R^2\sin(\phi)^2}d\phi=\int_{-\pi+\frac{\mu}{2}}^{\pi-\frac{\mu}{2}}Rd\phi=R(2\pi-\mu)$$

Die Gesamtlänge ist damit

$$L(\gamma)=L(\gamma_1)+L(\gamma_2)+L(\gamma_3)=2R+R(2\pi-\mu)$$

Natürlich hätte man sich das auch einfach überlegen können, indem man sagt, dass die Länge von γ_1 und γ_3 jeweils der Radius (also R) ist und die Länge von γ_2 der Gesamtumfang ($2R\pi$) mal dem Anteil $\frac{2\pi-\mu}{2\pi}$.

Jetzt berechnen wir noch den Flächeninhalt auf zwei verschiedene Arten: (i) mit der Sektorformel und (ii) direkt.
Die Sektorformel ist gegeben durch

$$I(F)=\frac{1}{2}|\int_a^b(x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t))|dt$$

Für γ_1 und γ_3 ergibt dieses Integral jeweils 0 (nachrechnen), somit bleibt:

$$I(F)=\frac{1}{2}|\int_{-\pi+\frac{\mu}{2}}^{\pi-\frac{\mu}{2}}R^2\cos(\phi)^2+R^2\sin(\phi)^2d\phi|=\frac{R^2}{2}|\int_{-\pi+\frac{\mu}{2}}^{\pi-\frac{\mu}{2}}1d\phi|=\frac{R^2}{2}(2\pi-\mu)$$

Das kann auch wieder direkt nachgerechnet werden, indem man den gesamten Flächeninhalt des Kreise ($R^2\pi$) mit dem Anteil multipliziert, den unser Sektor hat ($\frac{2\pi-\mu}{2\pi}$).

(6) *Lösung:*
Für den Schwerpunkt ist es sinnvoll, sich zuerst zu überlegen, dass das Stück oberhalb der x-Achse gleich lang (und damit gleich schwer) ist, wie das Stück unterhalb der x-Achse. Wir wissen somit, dass der Schwerpunkt auf der x-Achse liegen muss. Daher ist die y-Koordinate des Schwerpunktes $y_s = 0$ und wir müssen uns nur x_s ausrechnen.
Dafür verwenden wir die Formel

$$x_s = \frac{\int_a^b \sigma x(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt}{\int_a^b \sigma\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt}$$

Im Nenner dieser Formel steht die Masse des Weges, die σ mal der Länge des Weges beträgt. Damit vereinfacht sich der Nenner zu:
$\sigma(2R + R(2\pi - \mu))$.
Für unser Beispiel erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_s = & \frac{\int_0^R \sigma r\cos(-\pi + \frac{\mu}{2})\sqrt{\cos(-\pi + \frac{\mu}{2})^2 + \sin(-\pi + \frac{\mu}{2})^2}dr}{\sigma(2R + R(2\pi - \mu))} \\
& + \frac{\int_{-\pi+\frac{\mu}{2}}^{\pi-\frac{\mu}{2}} \sigma R\cos(\phi)\sqrt{R^2\cos(\phi)^2 + R^2\sin(\phi)^2}d\phi}{\sigma(2R + R(2\pi - \mu))} \\
& + \frac{\int_0^R \sigma(R - r)\cos(\pi - \frac{\mu}{2})\sqrt{\cos(\pi - \frac{\mu}{2})^2 + \sin(\pi - \frac{\mu}{2})^2}dr}{\sigma(2R + R(2\pi - \mu))} \\
= & \frac{\int_0^R r\cos(-\pi + \frac{\mu}{2})dr + \int_{-\pi+\frac{\mu}{2}}^{\pi-\frac{\mu}{2}} R\cos(\phi)Rd\phi + \int_0^R (R - r)\cos(\pi - \frac{\mu}{2})dr}{2R + R(2\pi - \mu)} \\
= & \frac{\frac{R^2}{2}\cos(-\pi + \frac{\mu}{2}) + R^2(\sin(\pi - \frac{\mu}{2}) - \sin(-\pi + \frac{\mu}{2})) + \frac{R^2}{2}\cos(\pi - \frac{\mu}{2})}{2R + R(2\pi - \mu)} \\
= & \frac{\frac{R^2}{2}\cos(\pi - \frac{\mu}{2}) + R^2\sin(\pi - \frac{\mu}{2})}{2R + R(2\pi - \mu)} \\
= & \frac{-\frac{R}{2}\cos(\frac{\mu}{2}) + R\sin(\frac{\mu}{2})}{2 + 2\pi - \mu}
\end{aligned}$$

Das schaut zugegebenermaßen ein bisschen kompliziert aus, prinzipiell ist aber nicht viel passiert, außer dass wir in die Formel eingesetzt haben. In den einzelnen Umformungsschritten geht es hauptsächlich darum, einfache Integrale zu lösen und um ein paar Sinus-Cosinus-Identitäten.
Im letzten Schritt wollen wir noch wissen, wie groß μ sein muss, damit der Schwerpunkt genau im Ursprung liegt. Da wir wissen, dass y_s immer 0 ist, müssen wir somit nur noch $x_s = 0$ setzen:

$$\begin{aligned}
x_S &= 0 \\
-\frac{1}{2}\cos(\frac{\mu}{2}) + \sin(\frac{\mu}{2}) &= 0 \\
tan(\frac{\mu}{2}) &= \frac{1}{2} \\
\frac{\mu}{2} &\approx 26.57^\circ \\
\mu &\approx 53.13^\circ
\end{aligned}$$