(64) Berechnen Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion $\frac{x^2+x+2}{(x+1)^2}$.

Lösung:
Der Nenner dieser rationalen Funktion hat schon eine Form, die wir sehr gut, als Potenzreihe darstellen können. Dazu müssen wir die Ableitung der geometrischen Reihe verwenden. Es gilt

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \qquad \Big|\, (\,\cdot\,)'$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -n(-x)^{n-1} \qquad \Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}$$

Jetzt spalten wir einfach noch den Zähler auf und multiplizieren die einzelnen x-Potenzen dann in die jeweiligen Reihen hinein.

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} =$$
$$= x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} + x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(-x)^{n-1}$$

Man kann diese drei Reihen jetzt noch zusammen fassen. (Eventuell muss man das aber auch nicht unbedingt.) Um diese Reihe zusammenfassen müssen wir den allseits unbeliebten Indexshift verwenden, um alle Reihen einmal auf x^n zu bringen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(-x)^{n-1} =$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(-x)^n$$

Jetzt schreiben wir bei der zweiten und dritten Reihe die ersten Terme extra, damit alle Reihen bei $n=2$ starten.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(-x)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(-x)^n =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(-x)^n + x + \sum_{n=2}^{\infty} n(-x)^n + 2 - 4x + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(-x)^n =$$
$$= 2 - 3x + \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)(-x)^n$$