(63) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{2x^3+4x+6}{(x-1)^2(x^2+3)}$.

Lösung:
Bei einer Partialbruchzerlegung wollen wir den Bruch in eine Summe aus möglichst einfachen Brüchen zerlegen. Das heißt Brüche, wo der Zähler nur eine Konstante ist und der Nenner ein Linearfaktor des Nenners. (Siehe dazu das Skriptum S. 59 - 61.) In unserem Fall ist der Nenner schon so weit wie möglich faktorisiert. Damit ergibt sich der Ansatz

$$\frac{2x^3+4x+6}{(x-1)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Um die Konstanten A, B, C und D zu bestimmen multiplizieren wir zunächst mit dem Nenner.

$$2x^3+4x+6 = A(x-1)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x-1)^2$$

Jetzt bestimmen wir die Konstanten. Dazu setzen wir zunächst einfach die Nullstelle $x = 1$ auf beiden Seiten ein.

$$\begin{aligned} 2+4+6 &= A\cdot 0 + 4B + (C+D)\cdot 0 \\ 12 &= 4B \\ 3 &= B \end{aligned}$$

Um die anderen Konstanten zu bestimmen, müssen wir das Polynom jetzt ausmultiplizieren und einen Koeffizientenvergleich machen.

$$\begin{aligned} 2x^3+4x+6 &= A(x-1)(x^2+3) + 3(x^2+3) + (Cx+D)(x-1)^2 \\ 2x^3+4x+6 &= x^3(A+C) + x^2(-A+3-2C+D) + x(3A-2D+C) + (-3A+9+D) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich des Polynoms links mit dem Polynom rechts liefert jetzt die 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} A+C &= 2 \\ -A+3-2C+D &= 0 \\ 3A-2D+C &= 4 \\ -3A+9+D &= 6 \end{aligned}$$

Wir können jetzt zum Beispiel A eliminieren, indem wir die erste Gleichung einmal zur zweiten, -3 mal zur dritten und dreimal zur Vierten Gleichung addieren. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 3-C+D &= 2 \\ -2D-2C &= -2 \\ 3C+9+D &= 12 \end{aligned}$$

Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned} -C + D &= -1 \\ -C - D &= -1 \\ 3C + D &= 3 \end{aligned}$$

Addieren wir die erste zur zweiten Gleichung erhalten wir $C = 1$. Damit ergeben sich dann die anderen Lösungen $D = 0$ und $A = 1$.
Also ist die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x^3 + 4x + 6}{(x-1)^2(x^2+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+3}$$

Brauchst du noch Unterstützung für den kommenden Test? Dann melde dich doch einfach für unseren Kurs zum 2. Übungstest an.