provided by easymath
EASYCLASS OG

(50) (a) Definieren Sie den Begriff der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion.

(b) Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung im (allgemeinen) Punkt x_0 der folgenden Funktionen $f(x)$ mit Hilfe des Differentialquotienten

(i) $f(x) = x^3 + x$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (für $x \neq 2$)

(iii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Hinweis: Erweitern Sie in (iii) den enstehenden Bruch passend.

Lösung:

(a) Eine reelle Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann am Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, wenn der Limes

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. (Man kann stattdessen auch den Limes $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ nehmen. Aber zum direkten rechnen, ist meistens der Limes mit $h \to 0$ leichter.)

(b) Jetzt berechnen wir die Ableitungen direkt, indem wir den Limes ausrechnen. Dazu formen wir den Quotienten solange um, bis das h im Nenner verschwindet und wir für den Limes einfach $h = 0$ setzen können.

(i) $f(x) = x^3 + x$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 + (x_0+h) - (x_0^3 + x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 + h}{h} = \lim_{h\to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 + 1 = 3x_0^2 + 1 \end{aligned}$$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (für $x \neq 2$):

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2-(x_0+h)} - \frac{1}{2-x_0}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(2-x_0) - (2-(x_0+h))}{(2-(x_0+h))(2-x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2-(x_0+h))(2-x_0)} = \\ &= \frac{1}{(2-x_0)^2} \end{aligned}$$

(iii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-(x_0+h)^2} - \sqrt{1-x_0^2}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-(x_0+h)^2} - \sqrt{1-x_0^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-(x_0+h)^2} + \sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-(x_0+h)^2} + \sqrt{1-x_0^2}} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(1-(x_0+h)^2) - (1-x_0^2)}{h\left(\sqrt{1-(x_0+h)^2} + \sqrt{1-x_0^2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x_0 h - h^2}{h\left(\sqrt{1-(x_0+h)^2} + \sqrt{1-x_0^2}\right)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2x_0 - h}{\left(\sqrt{1-(x_0+h)^2} + \sqrt{1-x_0^2}\right)} = \frac{-2x_0}{2\sqrt{1-x_0^2}} = -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \end{aligned}$$