(19) Verwenden Sie -ohne Beweis- $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \mathrm{e} = 2.7\ldots$ und die Definition des Grenzwertes, um die Ungleichung

$$2 < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3$$

für m groß genug zu zeigen. Folgern Sie daraus das Konvergenzverhalten von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
Hinweis für den ersten Teil: Wählen Sie in der Definition des Grenzwertes ϵ passend.
Hinweis für den zweiten Teil: Das Argument $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to \mathrm{e}^n \to \infty$ ist beliebt aber falsch.

Lösung:
Für die erste Aufgabe ist die Idee quasi: „Wir wissen, dass sich die Folge beliebig nahe an e annähert. Also muss sie irgendwann zwischen 2 und 3 sein, da ja e zwischen 2 und 3 liegt." Die Schwierigkeit ist hier nur, diesen Gedanken mathematisch zu formulieren. Dazu wiederholen wir als erstes nochmal die Definition von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N,\ n \in \mathbb{N}$$

Die Ungleichung $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right| < \epsilon$ gilt also für alle ϵ, ab einem gewissen Index. Wir wählen jetzt einfach $\epsilon = 0.1$. Nach der obigen Definition existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right| < 0.1 \quad \forall n \geq N.$$

Wir können den Betrag in der Ungleichung auflösen und erhalten dann folgende Aussage

$$\mathrm{e} - 0.1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} + 0.1 \quad \forall n \geq N.$$

Weil wir wissen, dass $\mathrm{e} = 2.7\ldots$ ist, also irgendwas zwischen 2.7 und 2.8, können wir die Aussage ein bisschen abschwächen zu

$$2.6 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2.9 \quad \forall n \geq N.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $2 < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3$ gilt, wenn m groß genug ist.

Jetzt beweisen wir den zweiten Teil durch eine Abschätzung:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\geq 2}\right)^n \geq 2^n \to \infty$$

Die Ungleichung gilt wieder nur, wenn n groß genug ist, aber da wir Grenzwerte betrachten, reicht uns das vollkommen. Wir haben also eine kleinere Folge gefunden, die bestimmt divergent[1] ist. Also muss die ursprüngliche Folge auch bestimmt divergent sein.

(21) Berechnen Sie die folgenden Limiten, wenn vorhanden. Sie dürfen dabei die Beziehung $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \mathrm{e}^x$ verwenden.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n,\ b_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{(n-1)^2}$$

[1] „Bestimmt divergent" bedeutet sie geht gegen $+\infty$.

Lösung:
Das Beispiel ist eigentlich sehr einfach, wenn man schon Beispiel (19) gerechnet hat. Wir verwenden für a_n das gleiche Prinzip wie vorher, allerdings müssen wir die Folge zuerst ein bisschen umformen.

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\leq 3}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}} \overset{2}{\to} 1$$

Der Grenzwert muss also kleiner gleich 1 sein. Jetzt machen wir noch die gleiche Abschätzung nur in die andere Richtung

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\geq 2}\right)^{\frac{1}{n}} \geq 2^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Der Grenzwert ist also auch größer gleich 1 und somit genau 1.

Für b_n machen wir einfach ein paar geschickte Umformungen

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{(n-1)^2} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-2n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-2n} \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1}$$

Wir können b_n also als das Produkt von drei konvergenten Folgen schreiben. Von diesen können wir jetzt jeweils einzeln den Grenzwert berechnen

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \overset{(n^2=m)}{=} \left(1+\frac{-1}{m}\right)^{m} \to \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-2n} \overset{3}{=} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-2} \to \left(\mathrm{e}^{1} \cdot \mathrm{e}^{-1}\right)^{-2} = 1^{-2} = 1$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1} \to 1-0 = 1$$

Damit können wir insgesamt sagen, dass

$$b_n \to \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Wenn du noch mehr Unterstützung brauchst, dann schau doch einfach mal bei unserem Kurs vorbei. Eine „Schnupperstunde“ist gratis, melde dich aber bitte trotzdem aus Platzgründen an.

Unsere Mathekurse für MB/WIMB/VT

[2]Man darf hier verwenden, dass der Grenzwert von $k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{k}$ gleich 1 für alle Zahlen $k \neq 0$ ist.
[3]Hier verwenden wir die dritte binomische Formel.