HAUPTVEKTOREN

Löse $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & -15 & -2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Ein Eigenwert ist -2.

Lösung: Wir berechnen wie üblich die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}) &= (-3-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) + 30 + 180 - 30(4-\lambda) + 6(-2-\lambda) + 30(-3-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda^2 - 3\lambda^2 + 12\lambda - 6\lambda + 8\lambda + 210 - 120 + 30\lambda - 12 - 6\lambda - 90 - 30\lambda = \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 12 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Da wir schon wissen, dass -2 ein Eigenwert ist, können wir das charakteristische Polynom durch $(\lambda + 2)$ durch dividieren um es um einen Grad zu reduzieren:

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 12 : (\lambda + 2) = -\lambda^2 + \lambda + 6$$

Die übrigen zwei Nullstellen von $-\lambda^2 + \lambda + 6$ ergeben sich mit der Lösungsformel: $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 3$.
Jetzt berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\begin{array}{rrr|r} -6 & 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -15 & -5 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt haben wir das Problem, dass es nur zwei Eigenvektoren gibt, da der Eigenwert -2 zwar algebraische Vielfachheit zwei, aber offensichtlich nur geometrische Vielfachheit eins hat. Wir

brauchen also einen Hauptvektor $\boldsymbol{h}$ zum Eigenwert -2. Den kann man in 99% der Fälle bestimmen, indem man das Gleichungssystem $(A-\lambda I)\boldsymbol{h}=\boldsymbol{v}$ löst. Hierbei ist $\boldsymbol{v}$ der Eigenvektor zum Eigenwert -2.
Das ergibt das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & -15 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 30 & 15 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad L=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$$

Bei den Eigenvektoren haben wir uns immer für die Vektoren interessiert, die den Lösungsraum aufspannen. Bei den Hauptvektoren interessieren wir uns für den Vektor, der die Punktlösung ist. In diesem Fall ist das also der Vektor $\boldsymbol{h}=(0,0,1/2)^T$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich jetzt aus der Formel

$$\boldsymbol{y}(x)=c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\,\boldsymbol{v}_1+c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\,(x\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{h})+c_3\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,\boldsymbol{v}_2$$

das führt in unserem Fall zu

$$\boldsymbol{y}(x)=c_1\,\mathrm{e}^{-2x}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\,\mathrm{e}^{-2x}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}\right)+c_3\,\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$