Berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & & & 3y_2 & + & 3y_3 \\ y_2' & = & 8y_1 & + & 7y_2 & + & 6y_3 \\ y_3' & = & -6y_1 & - & 6y_2 & - & 5y_3. \end{array}$$

Lösung: Wir müssen einfach die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \\ -6 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

berechnen. Dazu setzen wir das charakteristische Polynom Null:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ 8 & 7-\lambda & 6 \\ -6 & -6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \overset{!}{=} 0$$

Um die Nullstellen dieses Polynoms zu finden, müssen wir zunächst die erste Nullstelle erraten. Dazu probiert man meistens die Zahlen $1, 0$ und -1. Für $\lambda_1 = 1$ sehen wir, dass es sich tatsächlich um eine Nullstelle handelt.

Damit können wir eine Polynomdivision durchführen

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + \lambda + 6$$

Die Nullstellen von $-\lambda^2 + \lambda + 6$ bekommen wir einfach mit der kleinen Lösungsformel. Das führt zu $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$.

Jetzt können wir die Eigenvektoren berechnen:

$\lambda_1 = 1:$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right.$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3:$

$$\begin{array}{rrr|r} -3 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & -8 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -14 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 7/6 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -2:$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} -1/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$