(59) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $(1 + 3x^2)y^2 + y' = 0$, beispielsweise mittels Trennung der Variablen. Sind die Lösungen der Differentialgleichung eindeutig, dh. gibt es für jeden Anfangswert $y(a) = b$ genau eine Lösung?
Machen Sie dasselbe für $y' = \sqrt{|y|}$.

Lösung:
Wir lösen die DGL mit Trennung der Variablen. Dazu müsssen alle y und y' auf eine Seite und alle x auf die andere.

$$\begin{aligned}
(1 + 3x^2)y^2 + y' &= 0 \\
1 + 3x^2 &= -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \quad \Big| \int \\
\int (1 + 3x^2)\,\mathrm{dx} &= \int -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} \\
\int (1 + 3x^2)\,\mathrm{dx} &= \int -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{dy} \\
x + x^3 + c &= \frac{1}{y} \\
y(x) &= \frac{1}{x + x^3 + c}
\end{aligned}$$

Bei dieser Lösung haben wir durch y^2 durch dividiert. Das dürfen wir nur machen, wenn y nicht die Nullfunktion ist. Theoretisch gibt es noch eine zweite Lösung nämlich $y(x) = 0$. Welche der beiden Lösungen wir brauchen, sehen wir immer aus der Anfangsbedingung $y(a) = b$.
Wenn $b = 0$, dann ist die Nulllösung, die Lösung die wir brauchen. Wenn $b \neq 0$, dann ist $y(x) = \frac{1}{x^3+x+c}$ die richtige Lösung. Den Parameter c kann man sich dann leicht ausrechnen aus a und b: $c = \frac{1-b(a^3+a)}{b}$. Die Lösung lässt sich also immer eindeutig bestimmen.
Theoretisch sagt uns das auch der Satz von Picard Lindelöf. Dieser besagt, dass die Lösung einer DGL der Form $y' = f(x, y)$ immer eindeutig ist, wenn die Funktion $f(x, y)$ Lipschitz-stetig ist.
Lipschitz-stetig sind Funktionen immer dann, wenn ihre Ableitung beschränkt ist. Das ist bei der Funktion $(1 + 3x^2)y^2$ der Fall, aber nicht bei $\sqrt{|y|}$.
Nun lösen wir noch die zweite Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
y' &= \sqrt{|y|} \\
\frac{1}{\sqrt{|y|}}y' &= 1 \\
\frac{1}{\sqrt{|y|}}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} &= 1 \quad \Big| \int \mathrm{dx} \\
\int \frac{1}{\sqrt{|y|}}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} &= \int 1\,\mathrm{dx} \\
\int \frac{1}{\sqrt{|y|}}\,\mathrm{dy} &= \int 1\,\mathrm{dx} \\
2\sqrt{|y|}\frac{y}{|y|} &= x + c
\end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{y}{|y|}$ kommt wegen des Betrags von y dazu. Er ist immer $+1$ oder -1. Wenn wir die Gleichung jetzt quadrieren, fällt we weg. (Man kann hier auch ein bisschen schlampiger sein und einfach $\int \frac{1}{\sqrt{|y|}}\,\mathrm{dy} = 2\sqrt{|y|}$ schreiben.)

$$|y(x)| = \frac{(x+c)^2}{4}$$
$$y(x) = \pm\frac{(x+c)^2}{4}$$

Wenn wir diese Lösung in die Anfangsgleichung einsetzen, sehen wir, dass y' immer größer gleich 0 sein muss. Damit können wir die Lösung präzisieren:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x+c)^2}{4} & x \geq -c \\ -\frac{(x+c)^2}{4} & x < -c \end{cases}$$

Leider ist die Lösung noch nicht ganz vollständig. Wie bei der vorigen Gleichung muss man auch hier die Lösung $y(x) = 0$ berücksichtigen. Dort wo unsere Lösung 0 wird, kann sie also beliebig lange 0 bleiben. Damit bekommen wir die allgemeine Lösung.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x+c_1)^2}{4} & x \geq -c_1 \\ 0 & x \in (-c_2, -c_1) \\ -\frac{(x+c_2)^2}{4} & x \leq -c_2 \end{cases}$$

Wobei für die Parameter $-c_2 \leq -c_1$ gelten muss. Hier gibt es also zwei Paramter, also reicht eine Anfangsbedingung nicht um beide zu bestimmen.

Noch ein kleiner Zusatz für sehr Interessierte:
Bei den Differentialgleichung haben wir verwendet, dass $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$. Streng genommen ist das mathematisch aber nicht gerechtfertigt. Was hier eigentlich passiert ist eine Subsitution beim Integrieren beziehungsweise die Umkehr der Kettenregel des Differenzierens. Wir betrachten nochmal die Gleichung:

$$1 + 3x^2 = -\frac{1}{y^2}y'$$

Was wir jetzt eigentlich tun, ist auf beiden Seiten nach x zu integrieren. Auf der linken Seite bleibt das ein normales Integral nach x. Auf der rechten Seite erhalten wir:

$$\int -\frac{1}{y^2}y' \,\mathrm{dx} = \int \left(\frac{1}{y}\right)' \mathrm{dx} = \frac{1}{y}.$$