(54) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2xy+1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ konservativ ist und berechnen Sie seine Potentialfunkton.
Berechnen Sie dann das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, wobei C den Kreisbogen $x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0, y \geq 0$ mit Ausgangspunkt $(2,0)$ und Endpunkt $(0,2)$ bezeichnet, sowohl direkt als auch mit Hilfe der Potentialfunktion.

Lösung: Als erstes zeigen wir, dass $\boldsymbol{v}$ konservativ ist, also dass $\partial_x \boldsymbol{v}_2 - \partial_y \boldsymbol{v}_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_x \boldsymbol{v}_2 &= \partial_x(x^2) = 2x \\ \partial_y \boldsymbol{v}_1 &= \partial_y(2xy) = 2x \\ \Rightarrow \partial_x \boldsymbol{v}_2 - \partial_y \boldsymbol{v}_1 &= 2x - 2x = 0. \end{aligned}$$

Da es sich um eine konservatives Vektorfeld handelt, gibt es eine Potentialfunktion P zu $\boldsymbol{v}$.
Eine Potentialfunktion $P(x,y)$, ist eine Funktion, für die gilt $\nabla P(x,y) = \boldsymbol{v}(x,y)$.
Um P zu berechnen können wir beispielsweis so vorgehen:

$$\begin{aligned} \partial_y P &= x^2 \quad \Big| \int \mathrm{dy} \\ P &= x^2 y + c(x) \\ \partial_x P &= 2xy + 1 \quad \Big| \int \mathrm{dx} \\ P &= x^2 y + x + d(y) \end{aligned}$$

Hier ist $c(x)$ eine unbekannt Funktion, die nur von x abhängt und $d(y)$ eine unbekannte Funktion, die nur von y abhängt. Da aber beide Ausdrücke für P übereinstimmen müssen, können wir einfach die Terme mit nur x und nur y vergleichen und sehen, dass gilt $c(x) = x$ und $d(y) = 0$. Wir erhalten also insgesamt

$$P(x,y) = x^2 y + x + \tilde{c}$$

wobei $\tilde{c}$ eine Konstante ist. Das Potential hat immer eine unbestimmte Konstante dabei, da wir ja nur den Gradienten vom Potential kennen.

Jetzt zum Kurvenintegral:

Zuerst parametrisieren wir den Weg, der einfach ein Viertel vom Kreisbogen ist:

$$C = \left\{ \boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix},\ t \in [0, \pi/2] \right\}$$

Damit berechnet sich das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 8\cos(t)\sin(t) + 1 \\ 4\cos(t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\pi/4} -16\cos(t)\sin(t)^2 - 2\sin(t) + 8\cos(t)^3\, \mathrm{d}t = \\ &= -\frac{16}{3}\sin(t)^3 + 2\cos(t) + 8\sin(t) - \frac{8}{3}\sin(t)^3 \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= -\frac{16}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 2 = -2. \end{aligned}$$

Hier haben wir folgende Integrale als „Nebenrechnung" verwendet:

$$\int \cos(t)\sin(t)^2\, \mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = \sin(t) \\ \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}} = u'(t) = \cos(t) \\ \frac{\mathrm{du}}{\cos(t)} = \mathrm{dt} \end{matrix} \right| = \int u^2 \cos(t) \frac{\mathrm{du}}{\cos(t)} = \int u^2\, \mathrm{du} = \frac{u^3}{3} = \frac{\sin(t)^3}{3}.$$

Das Ergebnis können wir auch gleich fürs zweite Integral verwenden:

$$\int \cos(t)^3 \,\mathrm{dt} = \int (1 - \sin(t)^2) \cos(t) \,\mathrm{dt} = \sin(t) - \int \sin(t)^2 \cos(t) \,\mathrm{dt} = \sin(t) - \frac{\sin(t)^3}{3}.$$

Mit Hilfe der Potentialfunktion können wir dieses Integral aber auch ganz einfach berechnen:

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = P(0,2) - P(2,0) = \tilde{c} - (2 + \tilde{c}) = -2.$$