(49) Gegeben sei ein Kegel mit Grundfläche in der xy.Ebene und Spitze im Punkt $(0,0,2)$. Der Radius der Grundfläche ist $r=1$. Die Dichte des Materials, aus dem der Kegel gemacht ist, ist durch $\rho(x,y,z)=(1-\frac{z}{2})^{-1}$ gegeben. Berechnen Sie die Masse des Kegels.
Wie groß ist die Dichte des Kegels in der Spitze?
Machen Sie dann dasselbe für den „Ellipsenkegel“, dessen Grundfläche durch die Ellipse $x^2/4+y^2\leq 1$ gegeben ist. (Hier ist eine Variation von Polarkoordinaten praktisch.)

Lösung:
Um die Masse des Kegels zu berechnen müssen wir die Dichte über das Volumen des Kegels integrieren. Dazu müssen wir den Kegel erst Parametrisieren. Wir wählen dazu folgende Koordinaten:

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(\phi)\\r\sin(\phi)\\z\end{pmatrix}:\phi\in[0,2\pi],\ z\in[0,2],\ r\in[???]\right\}.$$

Da es sich um einen Kegel handelt, nimmt der Radius linear mit der Höhe ab. Bei $z=0$ ist der Radius $r=1$ und bei der Spitze $z=2$ ist der Radius $r=0$. Damit bekomen wir die Radiusfunktion $r(z)=1-\frac{z}{2}$. Das führt zur Parametrisierung

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(\phi)\\r\sin(\phi)\\z\end{pmatrix}:\phi\in[0,2\pi],\ z\in[0,2]\ r\in[0,1-\frac{z}{2}]\right\}.$$

Jetzt können wir das Volumsintegral berechnen, wobei wir den Transformationssatz verwenden.

$$m=\int_V\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{z}{2}}\rho(r,\phi,z)\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\phi}&\frac{\partial x}{\partial z}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\phi}&\frac{\partial y}{\partial z}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\phi}&\frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=$$
$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{z}{2}}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}\left|\det\begin{pmatrix}\cos(\phi)&-r\sin(\phi)&0\\\sin(\phi)&r\cos(\phi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=$$
$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{z}{2}}r\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=\int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}\Big|_0^{(1-z/2)}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=$$
$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=\int_0^2\pi(1-\frac{z}{2})\,\mathrm{d}z=\pi.$$

Die zweite Aufgabe geht im Wesentlichen genau gleich, nur dass wir die Prametrisierung anders wählen müssen:

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2r\cos(\phi)\\r\sin(\phi)\\z\end{pmatrix}:\phi\in[0,2\pi],z\in[0,2],r\in[0,1-\frac{z}{2}]\right\}.$$

Um auf diese Parametrisierung zu kommen, sollte man wissen (oder irgendwo nachschauen), dass man eine Ellipse mit der Gleichung $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ mit

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos(\phi)\\b\sin(\phi)\end{pmatrix}$$

parametrisieren kann.

Jetzt berechnen wir das Volumsintegral

$$m = \int_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{2}} \left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1} \left|\det \begin{pmatrix} 2\cos(\phi) & -2r\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \mathrm{dr}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz} =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{2}} 2r \left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1} \mathrm{dr}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1} \Big|_0^{(1-z/2)} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz} =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1-\frac{z}{2})\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz} = \int_0^2 2\pi(1-\frac{z}{2})\,\mathrm{dz} = 2\pi.$$