(74) Ein Draht der Dicke $d = 6$ verläuft entlang der Geraden g durch den Ursprung mit Richtungsvektor $(1, 2, 2)^T$. Parametrisieren Sie den Querschnitt des Drahtes im Abstand 10 zum Ursprung. *Anleitung: Parametrisieren Sie zuerst eine Kreisscheibe um die z-Achse mit Radius 3 und Abstand 10 zum Ursprung. Diese Menge können Sie dann durch anwenden einer geeigneten Drehmatrix so rotieren, dass die Rotationsachse zur Geraden g wird. Um die Drehmatrix zu erhalten, überlegen Sie sich einfach, wie die Bilder der Basisvektoren ausschauen müssen.*

Lösung:

Eine Kreisscheibe um die z-Achse im Abstand 10 zum Mittelpunkt lässt sich parametrisieren mit $M = \{(r\cos(\phi), r\sin(\phi), 10)^T : \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, 3]\}$. Diese wollen wir jetzt in Richtung der Achse drehen, also multiplizieren wir eine passende Drehmatrix auf unsere Menge. Die Matrix muss folgendes können:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

und die x-y-Ebene auf die Ebene orthogonal zu $(1, 2, 2)^T$ abbilden. Also zum Beispiel

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \to \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}\right]$$

Also haben wir die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt T angewandt auf M:

$$TM = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} r\sin(\phi) + \frac{10}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos(\phi) + \frac{1}{3\sqrt{2}} r\sin(\phi) + \frac{20}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} r\cos(\phi) + \frac{1}{3\sqrt{2}} r\sin(\phi) + \frac{20}{3} \end{pmatrix} : \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, 3] \right\}.$$