(64) (a) Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \tan(x+y) - 1$ indem du $z(x) = x + y(x)$ setzt.

(b) Finde eine Lösung der Differentialgleichung $x^3y''' - x^2y'' + xy' - y = 0$ durch die Variablentransformation $x = \mathrm{e}^t$ auf eine Differentialgleichung für $z(t) = z(\ln(x)) = y(x)$.

Lösung:

(a) Das erste Beispiel ist recht einfach. Wir verwenden den vorgegebenen Ansatz und versuchen $z(x)$ anstatt $y(x)$ zu bestimmen. Dazu bilden wir zunächst die Abbildung von $z(x)$:

$$z'(x) = 1 + y'(x) = 1 + \tan(\underbrace{x + y(x)}_{=z(x)}) - 1 = \tan(z(x))$$

Das führt also auf die deutlich einfachere Differentialgleichung $z'(x) = 1 + \tan(z(x))$, die wir durch eine Separation der Variablen lösen können.

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \tan(z(x)) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\tan(z(x))} \\
\frac{1}{\tan(z(x))} z'(x) &= 1 \quad \Big| \int \mathrm{dx} \\
\int \frac{1}{\tan(z(x))} \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} \,\mathrm{dx} &= \int 1 \,\mathrm{dx} \\
\int \frac{1}{\tan(z} \,\mathrm{dz} &= \int 1 \,\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

Um das Integral $\int \frac{1}{\tan(z)} \,\mathrm{dz} = \int \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \,\mathrm{dz}$ zu berechnen, muss man $u = \sin(z)$ substituieren.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \,\mathrm{dz} = \left| \begin{array}{c} u = \sin(z) \\ \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dz}} = \cos(z) \\ \mathrm{dz} = \frac{1}{\cos(z)} \,\mathrm{du} \end{array} \right| &= \int \frac{\cos(z)}{u} \frac{1}{\cos(z)} \,\mathrm{du} = \int \frac{1}{u} \,\mathrm{du} = \\
&= \ln(|u|) + C = \ln(|\sin(z)|) + C
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\ln(|\sin(z)|) + C &= x \quad \Big| - C \\
\ln(|\sin(z)|) &= x - C \quad \Big| \mathrm{e}^{(\cdot)} \\
|\sin(z)| &= \mathrm{e}^{-C} \mathrm{e}^{x} \\
\sin(z) &\overset{1}{=} A \,\mathrm{e}^{x} \\
z &= \arccos\left(A \,\mathrm{e}^{x}\right)
\end{aligned}$$

Jetzt, da wir $z(x)$ gefunden haben, können wir auch leicht $y(x)$ finden, indem wir einfach $y(x) = z(x) - x = \arccos\left(A \,\mathrm{e}^{x}\right) - x$ rechnen.

[1] Hier lassen wir die Betragsstriche von $\sin(z)$ weg und lassen dafür auch negative Werte für die Konstante $A = \mathrm{e}^{-C}$ zu.

(b) Das zweite Beispiel gehen wir ähnlich an, aber es ist doch ein gutes Stück komplizierter, da wir hier für die unabhängige Variable substituieren. Wir überlegen uns als erstes, was sich für die einzelnen Ableitungen von y ergibt, wenn wir $y(x) = z(t(x)) = z(\ln(x))$ schreiben. Dazu brauchen wir jetzt oft die Kettenregel und die Produktregel.

$$\begin{aligned}
y(x) &= z(t(x)) = z(\ln(x)) \\
y'(x) &= (z(t(x)))' = z'(t(x))t'(x) = z'(t(x))\frac{1}{x} \\
y''(x) &= \big(z'(t(x))t'(x)\big)' = z''(t(x))t'(x)^2 + z'(t(x))t''(x) = z''(t(x))\frac{1}{x^2} + z'(t(x))\frac{-1}{x^2} \\
y'''(x) &= \big(z''(t(x))t'(x)^2 + z'(t(x))t''(x)\big)' = \\
&= z'''(t(x))t'(x)^3 + z''(t(x))2t'(x)t''(x) + z''(t(x))t'(x)t''(x) + z'(t(x))t'''(x) = \\
&= z'''(t(x))\frac{1}{x^3} + z''(t(x))\frac{-3}{x^3} + z'(t(x))\frac{2}{x^3}
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir diese Ausdrücke in die ursprüngliche Differentialgleichung ein. Statt $t(x)$ schreiben wir jetzt nur noch t, damit die ganze Sache übersichtlicher bleibt.

$$\begin{aligned}
x^3\left(z'''(t)\frac{1}{x^3} + z''(t)\frac{-3}{x^3} + z'(t)\frac{2}{x^3}\right) - x^2\left(z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2}\right) + x\left(z'(t)\frac{1}{x}\right) - z(t) = 0 \\
z'''(t) - 4z''(t) + 4z'(t) - z(t) = 0
\end{aligned}$$

Da alle x weggefallen sind, haben wir nur noch eine Differentialgleichung in t. Die Ableitung bei z' steht jetzt für eine Ableitung nach t. Diese können wir mit dem üblichen Ansatz lösen $z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Das ergibt die Gleichung für λ:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0.$$

Das ergibt die Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Damit haben wir die Lösung für $z(t)$:

$$z(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t} + c_3\,\mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

Jetzt können wir die Lösung für $y(x)$ erhalten, indem wir rücksubstituieren $y(x) = z(\ln(x))$. Dabei verwenden wir die Rechenregel für Potenzen: $\mathrm{e}^{\lambda t} = \left(\mathrm{e}^t\right)^\lambda$ und damit $\mathrm{e}^{\lambda\ln(x)} = \left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^\lambda = x^\lambda$. Wir erhalten also

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} + c_3 x^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}.$$