EASYCLASS - PROBETEST ZUM 1. TEST MATHE 2 SS 2019

(1) (a) Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum?
 (i) $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \det(A) = 0\}$
 (ii) $W = \{f \in C[0,1]: f(0)^2 = f(1)\}$
 (iii) $X = \{v \in \mathbb{R}^n: l(v) = 0\}$ wobei l eine lineare Abbildung ist.

(b) Welche der folgenden Abbildungen ist linear?
 (i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ -xy \\ 2x+y \end{pmatrix}$
 (ii) $\psi: C[0,5] \to \mathbb{R}^2, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(2) \\ f(1)+f(3) \end{pmatrix}$
 (iii)
$$\phi : \{\text{Konvergente Folgen}\} \to \mathbb{R}$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto 2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + a_1$$

(2) (a) Was besagt das Rang Kriterium für die Lösungen von linearen Gleichungssystemen?

(b) Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ an. Handelt es sich um einen Vektorraum?
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 14 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 & -1 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(3) Betrachte die Abbildungsmatrix
$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$
(a) Was lässt sich über die Eigenvektoren der Matrix A ohne Rechnung sagen?
(b) Berechne eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix A.
(c) Wie sieht die Abbildungsmatrix bezüglich der Basis der Eigenvektoren aus?
(d) Gib die Koordinatendarstellung des Vektors $v = \left(2\sqrt{2},\ 1,\ 0\right)^T$ in der Basis der Eigenvektoren an.

(4) (a) Gib eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$, sowie den zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

(b) Gib die Abbildungsmatrix der Abbildung an, die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ zuerst um $\pi/3$ gegen den Uhrzeigersinn um die z-Achse dreht und dann auf die xy-Ebene projiziert.

(c) Gib die Determinante von S^{-1} an, wobei
$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$