(34) Geben Sie ein Gleichungssystem an, das den Unterraum $U$ als Lösungsraum hat.

(a)

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Punkt 34a können Sie das Gleichungssystem direkt ablesen. Bei Beispiel 34b müssen Sie den Unterraum erst auf die selbe Gestalt wie bei Beispiel 34$a$ bringen.

*Lösung:*

(a) Für dieses Beispiel (und auch für Beispiel 33) müssen wir wissen, wie man die Lösung aus einem „gelösten“ Gleichungssystem abliest. Ein Gleichungssystem mit $k$ linear unabhängigen Zeilen betrachten wir dann als gelöst, wenn es in folgender Form vorliegt:

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a & e & w \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & f & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c & g & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & h & z \end{array}$$

Die Lösung ist dann der verschobene Unterraum

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit können wir das Gleichungssystem für den Unterraum in ($a$) einfach ablesen.

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \end{array}$$

(b) Hier machen wir zuerst Spaltenumformungen im Unterraum, um ihn auf die gleiche Darstellung wie in ($a$) zu bringen.
*Bemerkung:* Wir geben den Raum $U$ durch einen Punkt und zwei aufspannende Vektoren an. Wenn wir die aufspannenden Vektoren linear kombinieren, oder zum Punkt dazu addieren, verändert sich der Raum nicht.

Als erstes ziehen wir den ersten Richtungsvektor einmal vom Punkt ab:

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann subtrahieren wir noch den zweiten Richtungsvektor vom Ersten.

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann dividieren wir den ersten Richtungsvektor noch durch $(-2)$ und multiplizieren den Zweiten mit $(-1)$.

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir das lineare Gleichungssystem ablesen.

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$