(15) (a) Was ist eine Orthonormalbasis?

(b) Es sei $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ eine Basis eines $n-$dimensionalen Vektorraumes V. Zeigens Sie mit vollständiger Induktion, dass die im Folgenden definierten Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ eine Orthonormalbasis von V bilden!

(i) $\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}$

(ii) für $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$d_k := b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{a}_i \rangle \boldsymbol{a}_i$$

und

$$a_k := \frac{d_k}{\|d_k\|}.$$

Lösung:

(a) Eine Orthonormalbasis ist eine Basis $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ eines Vektorraumes V, für die zusätzlich gilt:

(i) Die Vektoren stehen orthogonal aufeinander:
$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j.$

(ii) Die Vektoren sind normiert:
$\|\boldsymbol{a}_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$

(Was man zusätzlich noch wissen sollte, ist die Definition einer Basis: Eine Basis ist eine maximale Teilmenge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes.)

(b) Wir machen eine Induktion nach der Anzahl der Basisvektoren n.

Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt $\{\boldsymbol{a}_1\}$ ist eine Orthonormalbasis, da $\|\boldsymbol{a}_1\| = 1$ und da die Menge nur einen Vektor enthält, sind auch alle Vektoren orthogonal aufeinander.

Induktionsschritt:
Es sei $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n+1}\}$ eine Basis eines $(n+1)-$dimensionalen Vektorraumes V. Nach Induktionsannahme ist $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ eine Menge orthonormaler Vektoren. Wir müssen zeigen, dass auch $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}\}$ auch eine Orthonormalbasis ist, also dass $\langle \boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_k \rangle = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $\|\boldsymbol{a}_{n+1}\| = 1$.

Nach Definition ist $\boldsymbol{a}_{n+1}$ normiert, da $\boldsymbol{a}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{d}_{n+1}}{\|\boldsymbol{d}_{n+1}\|}$. Wir prüfen die Orthogonalität nach:

$$\langle \boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_k \rangle \overset{i}{=} \langle \frac{\boldsymbol{d}_{n+1}}{\|\boldsymbol{d}_{n+1}\|}, \boldsymbol{a}_k \rangle \overset{ii}{=} \frac{1}{\|d_{n+1}\|} \langle \boldsymbol{b}_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{b}_{n+1}, \boldsymbol{a}_i \rangle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k \rangle =$$

$$\overset{iii}{=} \frac{1}{\|d_{n+1}\|} \left(\langle \boldsymbol{b}_{n+1}, \boldsymbol{a}_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{b}_{n+1}, \boldsymbol{a}_i \rangle \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k \rangle \right) \overset{iv}{=} \frac{1}{\|d_{n+1}\|} \big(\langle \boldsymbol{b}_{n+1}, \boldsymbol{a}_k \rangle - \langle \boldsymbol{b}_{n+1}, \boldsymbol{a}_k \rangle \big) = 0$$

i) Hier haben wir die Definition von $\boldsymbol{a}_{n+1}$ verwendet.

ii) Hier haben wir die Definiton von $\boldsymbol{d}_{n+1}$ verwendet und dass für Skalarprodukte gilt $\langle c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = c \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

iii) Hier haben wir die Linearität des Skalarprodukts verwendet $\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$.

iv) Hier haben wir verwendet, dass nach Induktionsvoraussetzung gilt $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0$ und $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i \rangle = \|\boldsymbol{a}_i\|^2 = 1$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i \neq j$.

Damit ist die Induktion bewiesen.
(*Anmerkung:* Statt $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ schreibt man oft auch $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.)