(7) Sind die beiden folgenden Mengen *Teilmengen* eines Vektorraumes? Welche der beiden Mengen ist selbst ein Vektorraum?
   (a) die Menge A der Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^x\, y(x)$.
   (b) die Menge B der Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^x\, y(x) + 1$.

Lösung:

Zunächst ist die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ein Vektorraum, folglich sind beide Mengen Teilmengen eines Vektorraumes. Wir könnten auch einen „kleineren“ Vektorraum finden, von dem beide Mengen Teilmengen sind: Zum Beispiel den Vektorraum aller stetigen Funktionen, oder den Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen.

Die spannendere Frage ist, ob die Mengen selbst Vektorräume sind:

(a) Da die Menge A schon Teilmenge eines Vektorraumes ist, müssen wir nur noch überprüfen, ob A unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist. (Unterraum Kriterium!) Also ob die Summe zweier Elemente aus A wieder ein Element von A ist, und ob ein Vielfaches eines Elementes aus A wieder in A ist.

<u>Addition:</u>

Seien f und g Elemente aus A, dann gelten die Gleichungen $f'(x) = \mathrm{e}^x\, f(x)$ und $g'(x) = \mathrm{e}^x\, g(x)$. Daraus folgt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \mathrm{e}^x\, f(x) + \mathrm{e}^x\, g(x) = \mathrm{e}^x (f(x) + g(x)) = \mathrm{e}^x (f+g)(x).$$

Also löst auch $(f+g)$ die Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^x\, y(x)$, also ist auch $(f+g)$ in A.

<u>Multiplikation:</u>

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reele Zahl und f ein Element aus A. Es gilt wieder $f'(x) = \mathrm{e}^x\, f(x)$. Wir erhalten

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) = \lambda\, \mathrm{e}^x\, f(x) = \mathrm{e}^x (\lambda f)(x).$$

Also erfüllt auch die Funktion $(\lambda f)(x)$ die Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^x\, y(x)$, also ist auch (λf) in A. Somit ist A unter der Addition und Multiplikation abgeschlossen und folglich selbst ein Vektorraum.

(b) Für die Menge B gilt dasselbe, wie für die Menge A. Wir überprüfen, ob B unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist.

<u>Addition:</u>

Seien f und g Elemente aus B, dann gelten die Gleichungen $f'(x) = \mathrm{e}^x\, f(x) + 1$ und $g'(x) = \mathrm{e}^x\, g(x) + 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) &= \mathrm{e}^x\, f(x) + 1 + \mathrm{e}^x\, g(x) + 1 = \\ &= \mathrm{e}^x (f+g)(x) + 2 \neq \mathrm{e}^x (f+g)(x) + 1\end{aligned}$$

Also ist B nicht abgeschlossen unter der Addition. Folglich ist B auch kein Vektorraum. Ansich sind wir hier schon fertig, aber zu Übungszwecken können wir auch noch überprüfen, ob B unter der Multiplikation abgeschlossen ist.

Multiplikation:

(Jetzt in verkürzter mathematischer Schreibweise:) Sei $f \in B$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x) = \lambda(\mathrm{e}^x f(x) + 1) = \\ &= \mathrm{e}^x (\lambda f)(x) + \lambda \neq \mathrm{e}^x (\lambda f)(x) + 1.\end{aligned}$$

Folglich ist $(\lambda f) \notin B$, also ist B auch unter der Multiplikation nicht abgeschlossen.