(71) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 1}(\ln(x)\ln(\ln(x)))$$

indem Sie die Stetigkeit der Funktion

$$h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

verwenden.

Lösung:
Zunächst beweisen wir, dass die Funktion $h(x)$ wirklich stetig ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$ gilt. Für alle $x > 0$ ist die Funktion sowieso stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen.

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = „\frac{\infty}{\infty}“ \stackrel{1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Jetzt müssen wir nur noch verstehen, wie die Funktion $h(x)$ mit dem ursprünglichen Limes zusammen hängt.
Wenn $x \to 1$, dann geht $\ln(x) \to 0$. Deswegen können wir bei dem Limes folgende Substituion machen

$$\lim_{x\to 1}(\ln(x)\ln(\ln(x))) = \left| y = \ln(x) \right| = \lim_{y\to 0} y\ln(y) = 0.$$

Die letzte Gleichheit folgt, weil das ja nichts anderes ist, als der Limes der Funktion $h(y)$, den wir uns gerade überlegt haben.

[1] Hier verwenden wir den Satz von de L' Hospital. Dazu haben wir zuerst geprüft, dass der Fall „Unendlich durch Unendlich“ vorliegt, damit wir den Satz überhaupt anwenden dürfen.