(65) (a) Unter welchen Voraussetzungen gilt die Regel von de l'Hospital?

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte für alle *positiven* reellen Zahlen α:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(\alpha x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}.$$

(c) *Folgern* Sie aus Beispiel (b) die Grenzwerte von

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha}$$

für alle *positiven* reellen Zahlen α und β.

Lösung:

(a) Die Regel von de l'Hospital kann man anwenden, wenn man den Limes eines Bruches berechnet, bei dem die Funktion im Zähler und im Nenner beide gegen Null oder beide gegen Unendlich gehen. Wenn der Limes der Ableitungen existiert, dann hat der ursprüngliche Limes den gleichen Wert. Wenn der Limes der Ableitungen nicht existiert, dann liefert die Regel von de l'Hospital keine Aussage.

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(\alpha x)} = \frac{\infty``}{„\infty} \overset{de\ l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{\exp(\alpha x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha\exp(\alpha x)} = 0$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\alpha > 0$ und deswegen $\alpha\exp(\alpha x) \to +\infty$ gilt.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{\infty``}{„\infty} \overset{de\ l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\alpha > 0$ und deswegen $\alpha x^\alpha \to +\infty$ gilt.

(c) Hier muss man jetzt den folgenden sehr hilfreichen Trick verwenden. Wir heben aus dem ganzen Bruch die Potenz β heraus und vertauschen dann die Potenz mit dem Limes. (Das darf man machen, da potenzieren eine stetige Funktion ist.)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\exp(\frac{\alpha}{\beta}x)}\right)^\beta = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(\frac{\alpha}{\beta}x)}\right)^\beta = 0^\beta = 0.$$

Nachdem wir β herausgehoben hatten, war der Limes genau die gleiche Rechnung wie bei (b), nur dass wir jetzt $\frac{\alpha}{\beta}$ statt α hatten. Das ändert aber nichts an der Rechnung da $\frac{\alpha}{\beta}$ auch positiv ist. Genau das Gleiche machen wir jetzt auch bei dem zweiten Limes.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = 0^\beta = 0.$$